Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара

А.В. Сясєв

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ ІЗ КУРСУ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Диференціальні рівняння першого порядку

Ухвалено вченою радою університету

Дніпропетровськ
РВВ ДНУ
2012

УДК 517 (07)
С 99

Рецензенти:
д-р. фіз.-мат. наук, проф. А.В. Павленко
канд. фіз.-мат. наук, доц. Т.І. Рибнікова

С 99 Сясєв, А. В. Конспект лекцій із курсу „Вища математика”. Диференціальні рівняння першого порядку [Текст] / А.В. Сясєв. – Д.: РВВ ДНУ, 2012. – 44 с.

Викладено основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь першого порядку та методи їх розв’язування. Наведено докладні етапи розв’язання типових задач з додатковим поясненням теоретичних положень.

Призначений для студентів усіх спеціальностей ДНУ, які вивчають дисципліну „Вища математика”.

Темплан 2012, поз. 30

Навчальне видання

Андрій Валерійович Сясєв

Конспект лекцій із курсу „Вища математика”.
Диференціальні рівняння першого порядку

Редактор В.О. Насєкан
Техредактор Л.П. Замятіна
Коректор А.А. Гриженко

Підписано до друку 25.12.11. Формат 60х84 $^1/_{16}$. Папір друкарський. Друк плоский.
Ум. друк. арк. 2,6. Ум. фарбовідб. 2,6. Облік.- вид. арк. 2,5. Тираж 150 пр. Замовлення №

РВВ ДНУ, просп.. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010.
Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м. Дніпропетровськ, 49050

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ЗАДАЧІ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Під час вивчення різних фізичних процесів і явищ часто не вдається безпосередньо знайти закон, що зв'язує величини, які їх характеризують, натомість легко встановити залежності між тими ж величинами і їх похідними або диференціалами.

Рівняння, в яких невідома функція входить під знаком похідної або диференціала, називають *диференціальними рівняннями*. Наприклад,

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0, \tag{1.1}$$

$$\left(x^2 + y^2\right)dx + xydy = 0, \tag{1.2}$$

$$\ddot{x} + m^2 x = A\sin\omega t, \tag{1.3}$$

$$y''' - xy'' = x, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0. \tag{1.5}$$

Якщо невідома функція є функція однієї незалежної змінної, то диференціальне рівняння називають *звичайним*, якщо ж двох і більше змінних – *рівнянням із частинними похідними*. Рівняння (1.1) – (1.4) є звичайні диференціальні рівняння, а рівняння (1.5) – рівняння з частинними похідними.

Під формально-математичним кутом зору задача розв’язання (інтегрування) диференціальних рівнянь є задача, зворотна диференціюванню.

Задача диференціального числення полягає в тому, щоб за заданою функцією знайти її похідну. Найпростіша зворотна задача має місце вже в інтегральному численні: дана функція $f(x)$, знайти її первісну. Якщо невідому первісну функцію позначити через y, то ця задача може бути записана у формі рівняння

$$y' = f(x). \tag{1.6}$$

Рівняння (1.6) є найпростіше диференціальне рівняння. Ми вже вміємо його розв’язувати. Справді, з інтегрального числення відомо, що найбільш загальна функція y, що задовольняє рівняння (1.6), має вигляд

$$y = \int f(x)dx + C. \tag{1.7}$$

Отже, наше диференціальне рівняння може мати безліч розв’язків, кожний із яких можна одержати, якщо довільній сталій C надати певне числове значення. Розв’язок (1.7) рівняння (1.6), що містить довільну сталу, називають *загальним розв’язком*. Кожний розв’язок, утворений із загального, якщо надати сталій C визначене числове значення, називають *частинним розв’язком*.

Таким чином, предметом теорії диференціальних рівнянь є розробка методів інтегрування диференціальних рівнянь і дослідження властивостей їх розв’язків.

Означення. *Звичайним диференціальним рівнянням* n *-го порядку відносно функції* $y = f(x)$ *називають співвідношення, що зв'язує незалежну змінну* x*, невідому функцію* $y = f(x)$ *і її похідні* $y', y'',..., y^{(n)}$.

Таке рівняння має вигляд

$$F\left(x, y', y'',..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Означення. *Порядком диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної, що входить у рівняння.*

Наприклад, рівняння (1.1), (1.2) – диференціальні рівняння першого порядку, рівняння (1.3), (1.5) – другого, а (1.4) – третього порядку.

Означення. *Розв'язком, або інтегралом диференціального рівняння, називають будь-яку неперервно диференційовану функцію, підстановка якої до рівняння перетворює його на тотожність.*

Приклад. Нехай ми маємо рівняння $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

Функції $y = \sin x$, $y = 2\cos x$, $y = 3\sin x - \cos x$ і взагалі функції вигляду $y = C_1 \sin x$; $y = C_2 \cos x$ або $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ є розв'язками даного рівняння за будь-якого вибору сталих C_1 і C_2; у цьому легко переконатися, підставивши зазначені функції до рівняння.

Характерна особливість диференціального рівняння полягає в тому, що воно має нескінченну множину розв'язків.

Означення. *Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку відносно функції* $y = f(x)$ *називають співвідношення, яке зв'язує незалежну змінну* x*, невідому функцію* $y = f(x)$ *і її першу похідну, тобто співвідношення вигляду*

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.8}$$

Якщо рівняння (1.8) можна розв'язати відносно y', то воно набуває вигляду

$$y' = f(x, y). \tag{1.9}$$

У цьому випадку говорять, що диференціальне рівняння (1.9) розв'язане відносно похідної.

Вище ми бачили, що диференціальне рівняння може мати нескінченну множину розв'язків. Сформулюємо умови, що визначають існування і єдиність розв'язків диференціального рівняння (1.9).

Теорема Коші *(про існування і єдиність розв'язку). Нехай функція* $f(x, y)$ *і її частинна похідна* $f'_y(x, y)$ *визначені і неперервні у відкритій області* D *площини* Oxy *і точка* $(x_0; y_0) \in D$*. Тоді існує єдиний розв'язок* $y = \varphi(x)$ *рівняння (1.9), який задовольняє умову*

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.10}$$

або $y(x)\big|_{x=x_0} = y_0$.

Умову (1.10) називають *початковою умовою*.

Означення. *Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію*

$$y = \varphi(x, C), \tag{1.11}$$

яка залежить від однієї довільної сталої C *(параметра) і задовольняє наступні умови:*

1) функція (1.11) задовольняє диференціальне рівняння за будь-якого конкретного значення C*;*

2) яка б не була початкова умова (1.10), можна знайти таке значення $C = C_0$*, що функція* $y = \varphi(x, C_0)$ *задовольнятиме дану початкову умову.*

При цьому передбачається, що значення $x_0,\ y_0$ належать до тієї області D зміни змінних x і y, у якій виконуються умови теореми існування і єдиності розв'язку.

Під час знаходження загального розв'язку диференціального рівняння ми часто приходимо до вигляду

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{1.12}$$

не розв'язаного відносно y. Розв'язуючи це співвідношення відносно y, одержуємо загальний розв'язок у вигляді (1.11). Однак виразити y із співвідношення (1.12) в елементарних функціях не завжди виявляється можливим; у таких випадках загальний розв'язок залишають у неявному вигляді. Рівність вигляду (1.12), що неявно задає загальний розв'язок, називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння.

Означення. *Частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають будь-яку функцію* $y = \varphi(x, C_0)$*, утворену із загального розв'язку (1.13), якщо в останньому довільній сталій* C *надати конкретне значення* $C = C_0$.

Співвідношення $\Phi(x, y, C_0) = 0$ називають у цьому випадку *частинним інтегралом* рівняння.

Задачу про відшукання частинного розв'язку диференціального рівняння називають ще ***задачею Коші***.

Зауваження. *Кількість констант у загальному розв'язку та кількість початкових умов у задачі Коші завжди дорівнює порядку диференціального рівняння.*

Приклад. Для рівняння $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ загальним розв'язком буде сім'я функцій $y = \dfrac{C}{x}$. Знайдемо частинний розв'язок, що задовольняє таку початкову умову: $y(2) = 1$. Підставляючи ці значення в загальний розв'язок $y = C/x$, одержимо $C = 2$. Отже, шуканим частинним розв'язком (розв'язком задачі Коші) буде функція $y = 2/x$.

Означення. *Точку* (x_0, y_0) *області* D, *у якій єдиність розв'язку порушується, тобто або немає розв'язку, що задовольняє задану початкову умову, або цю початкову умову задовольняє більш ніж один розв'язок (і, отже, заданням цієї початкової умови частинний розв'язок однозначно визначити не можна), називають особливою точкою диференціального рівняння.*

Так, диференціальне рівняння $y'x - y = 0$ має, як легко перевірити, загальний розв'язок $y = Cx$, причому початкову умову (за $x = 0$ $y = 0$) задовольняють усі частинні розв'язки, усі вони «проходять через точку» $(0; 0)$. Точка $(0; 0)$ є особлива точка цього диференціального рівняння. У цій точці, як це безпосередньо видно, рівняння не встановлює ніякого співвідношення між x, y і y'. Та ж точка $(0;0)$ є особлива і для диференціального рівняння $y'x + y = 0$, що має загальний розв'язок $y = \frac{C}{x}$, оскільки через неї не проходить графік жодного розв'язку; не має розв'язку, який задовольняє початкову умову: за $x = 0$, $y = 0$.

Крім загального розв'язку і частинних розв'язків, що випливають з нього, диференціальне рівняння може мати розв'язки, які не утворюються із загального ні за яких значень параметра C. Так, рівняння $y' = \sqrt{1 - y^2}$, крім загального розв'язку $y = \sin(x + C)$, $-\frac{\pi}{2} \le x + C \le \frac{\pi}{2}$ має ще розв'язки $y = 1$ і $y = -1$, які не утворюються із загального ні за яких значень C.

Якщо кожна точка розв'язку $y = \varphi(x)$ (який не утворюється із загального) є особлива точка диференціального рівняння, то розв'язок є *особливий*.

Зазначимо, що можуть бути особливі розв'язки, які входять до складу загального розв'язку; з іншого боку, розв'язки, які не утворюються із загального, можуть і не бути особливі. Особливий розв'язок характеризується тим, що через кожну точку його графіка, крім його самого, проходять графіки ще деяких інших розв'язків даного диференціального рівняння.

Розглянемо деякі задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь.

Задача 1. Визначити рівняння руху точки m по вертикальній прямій під дією сили ваги.

Розв'язання. Візьмемо за вісь Oy вертикальну пряму, по якій рухається точка; початок помістимо на поверхні Землі, а додатний напрямок будемо відраховувати уверх. Щоб знати рівняння руху нашої точки в будь-який момент часу t після початку руху $(t = 0)$, треба знати вираз єдиної координати цієї точки y як функції часу t.

Із механічного змісту другої похідної випливає, що прискорення дорівнює $\frac{d^2y}{dt^2}$; з іншого боку, ми знаємо, що прискорення сили ваги в кожній точці земної поверхні і поблизу неї стале і дорівнює $g = 9{,}81$ м / сек^2; воно спрямовано вниз, отже, у нашій системі координат йому треба додати знак «мінус». Прирівнюючи два знайдені вирази для прискорення точки, одержуємо рівняння, в якому невідомою є функція $y = y(t)$:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g . \tag{1.13}$$

Інтегруючи співвідношення (1.13) двічі по t, послідовно будемо мати

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1, \tag{1.14}$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 . \tag{1.15}$$

Вираз (1.15) є загальний розв'язок рівняння (1.13). Він містить дві довільні сталі C_1 і C_2.

З'ясуємо фізичний зміст цих сталих. Підставимо у рівняння (1.14) $t = 0$, одержимо $C_1 = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = v_0$ – початкова швидкість точки. Аналогічно з рівняння (1.15): $C_2 = y\big|_{t=0} = y_0$ – початкове положення точки.

Скориставшись новими позначеннями довільних сталих, запишемо загальний розв'язок (1.15) диференціального рівняння (1.13) у вигляді $y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0$.

Тепер стає ясно, які додаткові дані *(початкові умови)* необхідно мати, щоб одержати частинний розв'язок, що описує один цілком визначений рух. Необхідно знати числові значення початкового положення точки y_0 і початкової швидкості v_0.

Задача 2. Гнучка однорідна нитка підвішена за два кінці. Знайти рівняння кривої, по якій розташується нитка під дією власної ваги (рис. 1.1).

Розв'язання. Нехай $M_0(0;b)$ – найбільш низька точка нитки, M – її довільна точка. Розглянемо частину нитки M_0M. Ця частина знаходиться в рівновазі під дією трьох сил:

1) натяг T, що діє по дотичній у точці M і складає з віссю Ox кут φ;

2) натяг H у точці M_0, що діє горизонтально;

3) вага нитки γS, спрямованої вертикально вниз, де S – довжина дуги M_0M, γ – питома вага нитки.

Розкладаючи натяг T на горизонтальну і вертикальну складові, одержимо рівняння рівноваги: $T\cos\varphi = H$, $T\sin\varphi = \gamma S$.

Поділивши члени другої рівності на відповідні члени першої, одержимо

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\gamma}{H} S . \tag{1.16}$$

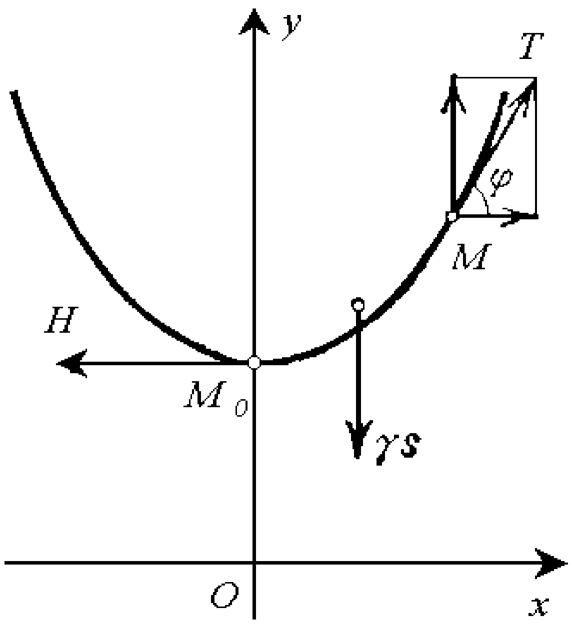

Рис. 1.1

Припустимо тепер, що рівняння невідомої кривої можна записати у вигляді $y = f(x)$. Тут $f(x)$ – невідома функція, яку слід знайти.

Зазначимо, що $\operatorname{tg}\varphi = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Тоді з (1.16) випливає

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma}{H} S. \qquad (1.17)$$

Диференціюємо обидві частини рівності (1.17) по x:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\gamma}{H}\frac{ds}{dx}. \qquad (1.18)$$

А втім, як відомо з курсу математичного аналізу,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Підставляючи значення $\dfrac{ds}{dx}$ у рівняння (1.18), одержуємо диференціальне рівняння шуканої кривої

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\gamma}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (1.19)$$

Не акцентуючи на методах розв’язування диференціальних рівнянь, запишемо загальний розв’язок рівняння (1.19)

$$y = \left(\frac{H}{\gamma}\right)\operatorname{ch}\left(\left(\frac{\gamma}{H}\right)x + C_1\right) + C_2. \qquad (1.20)$$

Визначимо константи C_1 і C_2: оскільки за $x = 0$ точка нитки займає саме низьке положення, то в цій точці дотична – горизонтальна, тобто $y'(0) = 0$. Крім того, за умовою задачі, у цій точці ордината дорівнює b, тобто $y(0) = b$.

Із рівняння (1.20) знаходимо, що $y' = \operatorname{sh}\left(\left(\frac{\gamma}{H}\right)x + C_1\right)$. Підставляючи $x = 0$, одержуємо $0 = \operatorname{sh}C_1$. Отже, $C_1 = 0$.

Із рівняння (1.20), поклавши $x=0$ і $C_1=0$, одержимо $b=\frac{H}{\gamma}+C_2$, звідки $C_2=b-\frac{H}{\gamma}$. Остаточно матимемо $y=\frac{H}{\gamma}\operatorname{ch}\left(\frac{\gamma}{H}x\right)+b-\frac{H}{\gamma}$.

Задача 3. Вода витікає через отвір у дні циліндричного резервуара. За яким законом буде знижуватися рівень води в резервуарі з часом, якщо відомо, що швидкість v витікання води з отвору змінюється залежно від висоти h стовпа води за законом $v=0{,}6\sqrt{2gh}$, де $g=981\,\text{см}/\text{сек}^2$.

Розв'язання. Позначимо (рис. 1.2) через H висоту резервуара, S – площу його основи, s – площу отвору і h – висоту води в резервуарі у момент часу t.

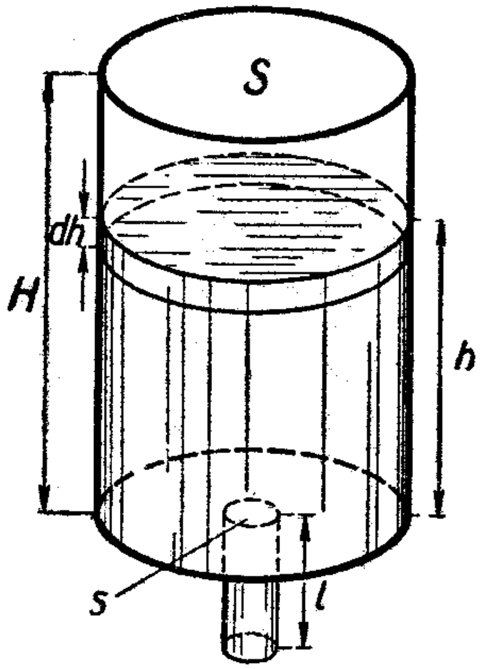

Рис. 1.2

Протягом часу від t до $t+\Delta t$ рівень води в резервуарі знизиться з h до $h+\Delta h$ $(\Delta h<0)$. За цей час із резервуара витече вода, об'єм якої дорівнює $-S\Delta h$. Таким же має бути об'єм струменя води, що витекла за цей час з отвору. Він дорівнює площі s, помноженій на довжину шляху l, пройденого часткою води з моменту t до $t+\Delta t$. Рух її нерівномірний: у момент t швидкість $v=0{,}6\sqrt{2gh}$, а у момент $t+\Delta t$ швидкість $v=0{,}6\sqrt{2g(h+\Delta h)}$. Для обчислення довжини пройденого шляху скористаємося середньою швидкістю: $l=v_{\text{ср}}\Delta t$, де

$v_{cp}=0{,}6\sqrt{2g(h+\Theta\Delta h)}$ $(0<\Theta<1)$.

Таким чином, ми приходимо до співвідношення

$$-S\Delta h=0{,}6\,s\sqrt{2g(h+\Delta h)}\,\Delta t\ .$$

Звідси $\frac{\Delta h}{\Delta t}=-k\sqrt{h+\Theta\Delta h}$, $\quad k=0{,}6\frac{s}{S}\sqrt{2g}$; переходячи до границі за $\Delta t\to 0$, одержуємо диференціальне рівняння нашої задачі:

$$\frac{dh}{dt}=-k\sqrt{h}\,.$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$2\sqrt{h}=-kt+C\,.$$

Беручи до уваги, що $h(0) = H$, знаходимо $2\sqrt{H} = C$. Отже, приходимо до рівності $2\sqrt{h} = -kt + 2\sqrt{H}$, звідки

$$t = \frac{2}{k}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right).$$

Це і є закон витікання води з отвору в дні резервуара. Поклавши $h = 0$, знаходимо, що вся вода витече із резервуара за $t = \frac{2}{k}\sqrt{H}$ сек.

Задача 4. Відомо, що швидкість розпаду радію прямо пропорційна його кількості. Знайти закон зміни маси радію залежно від часу.

Розв'язання. Нехай $R(t)$ – кількість радію в момент часу t. Швидкість розпаду радію як швидкість зміни функції є похідна. Отже, закон розпаду можна записати так:

$$\dot{R} = -kR, \qquad k > 0, \tag{1.21}$$

де k – коефіцієнт пропорційності (знак мінус означає, що маса радію з часом зменшується і відповідно $\dot{R} < 0$).

Щоб розв'язати диференціальне рівняння (1.21), запишемо його у вигляді

$$dt = -\frac{dR}{kR}. \tag{1.22}$$

Із інтегрального числення відомо, що рівняння (1.22) задовольняє функція $t + C = -\frac{1}{k}\ln R$, де C – довільна стала. Звідси визначаємо R як функцію t

$$R = e^{-kt-kC} = C_1e^{-kt}. \tag{1.23}$$

Нехай R_0 – кількість радію в момент часу $t = t_0$. Тоді з (1.23), маємо

$$R_0 = C_1e^{-kt_0},$$

звідки $C_1 = R_0e^{kt_0}$. Підставивши знайдене значення C_1 у (1.23), матимемо $R = R_0e^{-k(t-t_0)}$. Якщо $t_0 = 0$, то $R = R_0e^{-kt}$.

Це і є закон зміни початкової маси радію залежно від зміни часу.

Експериментально встановлено, що для радію $k = 0{,}000436$.

Знайдемо період піврозпаду радію, тобто відрізок часу, за який розпадається половина початкової маси:

$$\frac{R_0}{2} = R_0e^{-0{,}000436T},$$

звідки

$$-0{,}000436T = -\ln 2$$

і

$$T = \frac{\ln 2}{0{,}000436} = 1590 \textit{ років}.$$

Не існує будь-яких загальних правил для складання диференціальних рівнянь за умовами конкретної задачі. Умови задачі мають уможливлювати складання співвідношення, що зв'язує незалежну змінну, функцію і її похідну (або похідні). Якщо це задача геометричного характеру, то наявність у її даних дотичної (або нормалі) чи деяких зв'язаних з нею відрізків дає можливість написати співвідношення між координатами точок кривої і кутовим коефіцієнтом дотичної. У задачах фізичного або механічного характеру, у випадку якщо задана швидкість будь-якого процесу, часом можна відразу написати відповідне диференціальне рівняння. В інших випадках необхідно попередньо встановити співвідношення між збільшеннями змінних, потім переходом до границі одержати диференціальне рівняння.

Задач такого роду можна розглядати безліч, але всі вони так чи інакше відображають практичний бік питання, тому докладно ці задачі будемо розглядати на практичних заняттях.

2. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ТА ЙОГО РОЗВ'ЯЗКІВ

Геометричний зміст розв'язків диференціального рівняння. З геометричного погляду загальний інтеграл диференціального рівняння першого порядку являє собою сім'ю кривих на координатній площині, що залежить від однієї довільної сталої C. Ці криві називають *інтегральними кривими* даного диференціального рівняння. Частинному інтегралу диференціального рівняння відповідає *одна крива* цієї сім'ї, що проходить через деяку задану точку площини.

Так, для рівняння $y'x + y = 0$ загальний інтеграл геометрично зображують сім'єю гіпербол $y = \dfrac{C}{x}$, а частинний інтеграл, визначений початковою умовою $y(2) = 1$ – однією з цих гіпербол, що проходить через точку $M_0(2;1)$.

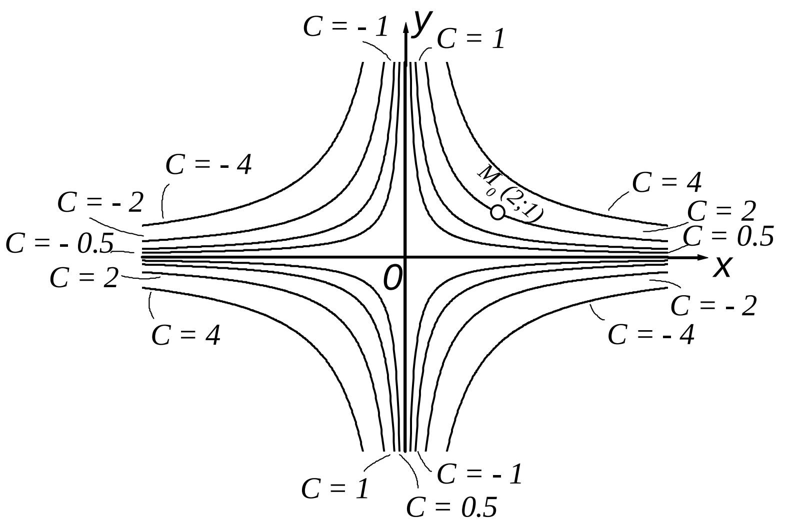

Рис. 2.1

На рис. 2.1 зображені криві сім'ї, що відповідають деяким значенням параметра: $C=1/2$, $C=1$, $C=2$, $C=4$, $C=-1$ і т.д.

Щоб зробити міркування більш наочними, ми будемо надалі називати *розв'язком рівняння* не тільки функцію $y=\varphi(x,C_0)$, що задовольняє рівняння, але і відповідну *інтегральну криву*. Отже, ми будемо говорити, наприклад, про розв'язок, що проходить через точку $(x_0;y_0)$.

Розв'язати або, як часто кажуть, *проінтегрувати* диференціальне рівняння– *означає*:

а) знайти його загальний розв'язок або загальний інтеграл, якщо початкові умови не задані;

б) знайти той частинний розв'язок рівняння, що задовольняє задані початкові умови, якщо такі є.

Геометрична інтерпретація диференціального рівняння першого порядку. Нехай дано диференціальне рівняння (1.9), розв'язане відносно похідної, і нехай функція вигляду (1.11) є загальний розв'язок даного рівняння. Цей загальний розв'язок визначає сім'ю інтегральних кривих на площині Oxy.

Рівняння (1.9) для кожної точки $M(x;y)$ визначає значення похідної $\frac{dy}{dx}$, тобто кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої, що проходить через цю точку. Таким чином, диференціальне рівняння (1.9) дає сукупність напрямків або, як кажуть, визначає *поле напрямків* на площині Oxy. Це поле можна зобразити, помістивши у відповідних точках області стрілки, що утворять з віссю Ox кути $\operatorname{arctg}(y')$ (додатний напрямок стрілки можна взяти довільним, тому що арктангенс визначає кут лише з точністю до кратного π).

Отже, з геометричного погляду задача інтегрування диференціального рівняння полягає у відшуканні кривих, напрямок дотичних до яких збігається з напрямком полів у відповідних точках.

Для диференціального рівняння (1.8) геометричне місце точок, у яких виконується співвідношення $\frac{dy}{dx}=C=\text{const}$ (тобто нахил дотичних однаковий), називають *ізокліною* даного диференціального рівняння.

За різних значень C одержуємо різні ізокліни. *Рівняння ізокліни, що* відповідає значенню C із (1.9), буде мати вигляд $f(x,y)=C$. Побудувавши сім'ю ізоклін, можна приблизно побудувати сім'ю інтегральних кривих. Говорять, що, знаючи ізокліни, можна якісно визначити розташування інтегральних кривих на площині.

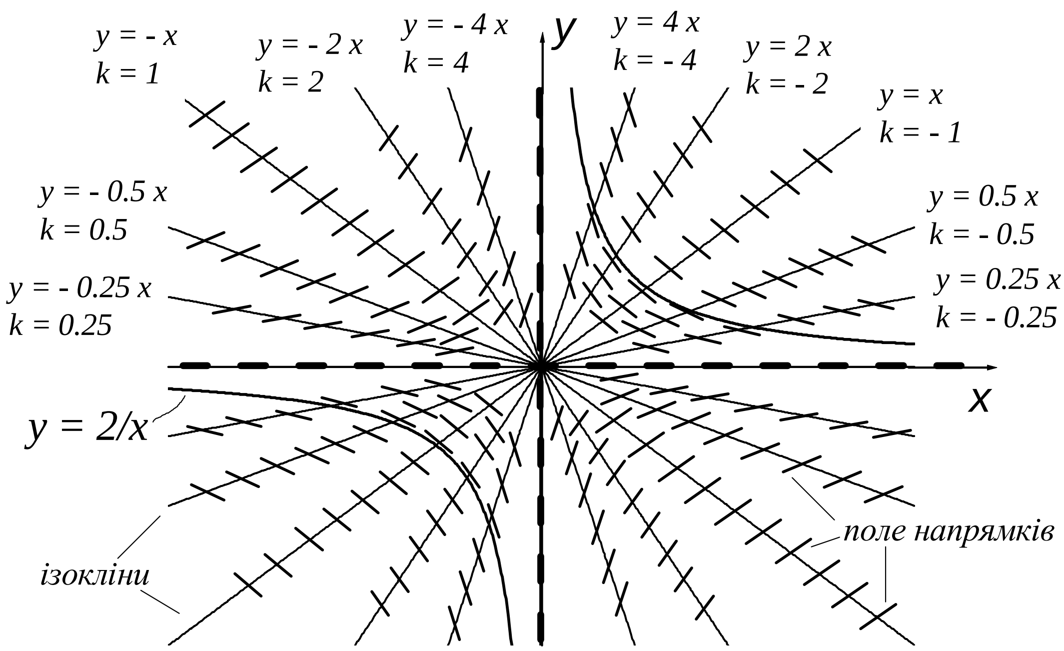

Рис. 2.2

На рис. 2.2 зображене поле напрямків, що визначає диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. Ізоклінами даного диференціального рівняння є (відповідно до означення) $\frac{-y}{x} = C$ або $y = -Cx$. Це − сім'я прямих.

3. ОСНОВНІ КЛАСИ РІВНЯНЬ, ІНТЕГРУВАННЯ ЯКИХ ЗДІЙСНЮЮТЬ У КВАДРАТУРАХ (ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЯХ)

Рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними. Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \tag{3.1}$$

де права частина є добуток функції, що залежить тільки від x, на функцію, що залежить тільки від y. Перетворимо (3.1) (припускаючи, що $f_2(y) \neq 0$):

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x) dx. \tag{3.2}$$

Уважаючи y функцією від x, рівність (3.2) можна розглядати як рівність двох диференціалів, при цьому невизначені інтеграли від них будуть відрізнятися постійним доданком. Інтегруючи ліву частину по y, а праву по x, одержимо співвідношення

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx + C,$$

що зв'язує функцію y, незалежну змінну x і довільну сталу C, тобто одержимо загальний інтеграл рівняння (3.1).

Таким чином, диференціальне рівняння (3.2), або його загальний вигляд

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \tag{3.3}$$

де $M(x)$ і $N(y)$ – неперервні функції, називають рівнянням з *відокремленими змінними*. Його *загальний інтеграл* з доведеного має вигляд

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C. \tag{3.4}$$

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $xdx + ydy = 0$.

Розв'язання. Згідно з (3.4) загальний розв'язок даного рівняння одержимо у вигляді

$$\int x\,dx + \int y\,dy = C \text{ або } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Означення: *Рівняння вигляду*

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \tag{3.5}$$

називають диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Метод розв'язування. Рівняння (3.5) може бути зведене до рівняння з відокремленими змінними (3.3) діленням обох частин на вираз $N_1(y)\ M_2(x)$ (в області, де $N_1(y) \neq 0$ і $M_2(x) \neq 0$):

$$\frac{M_1(x)N_1(y)dx}{N_1(y)M_2(x)} + \frac{M_2(x)N_2(y)dy}{N_1(y)M_2(x)} = 0$$

або

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0,$$

тобто одержали рівняння вигляду (3.3).

Загальний розв'язок, згідно (3.4), одержимо у вигляді

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C. \tag{3.6}$$

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$, який задовольняє початкову умову $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ (задача Коші).

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ (вигляд (3.1)). Зробимо відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{\operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} x\, dx .$$

Інтегруючи, одержимо

$$\int \operatorname{ctg} y\, dy = \int \operatorname{tg} x\, dx, \qquad \ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + C .$$

Звідси загальний інтеграл має вигляд

$$\sin y \cos x = C .$$

Підставляючи початкову умову $x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{4}$, матимемо

$$\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = C ; \qquad C = \frac{1}{2} .$$

Тоді частинний розв'язок (розв'язок задачі Коші) має вигляд $\sin y \cos x = \frac{1}{2}$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{y}{x} y' + e^{y} = 0$.

Розв'язання. Покажемо, що дане рівняння – рівняння з відокремлюваними змінними (визначимо тип). Дійсно, розв'язуючи дане рівняння відносно похідної, одержимо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{y}}{y} x ,$$

тобто рівняння вигляду (3.1), а відповідно до означення це і є рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні:

$$\frac{y dy}{e^{y}} = -x\, dx .$$

Інтегруючи останнє співвідношення, одержуємо

$$\int y e^{-y} dy = -\int x\, dx ,$$

$$-ye^{-y} - e^{-y} + C = -\frac{x^2}{2} .$$

Остаточно загальний розв'язок запишемо у вигляді

$$\frac{x^2}{2} - ye^{-y} - e^{-y} + C = 0 .$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $(1+x) y dx + (1-y) x dy = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння має вигляд (3.5). Відповідно до методу його розв'язування ділимо обидві частини рівняння на xy:

$$\frac{(1+x)y}{xy} dx + \frac{(1-y)x}{xy} dy = 0 \; ; \qquad x \neq 0, \qquad y \neq 0 .$$

Маємо рівняння вигляду (3.3)

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0\,.$$

Його загальний інтеграл, згідно (3.4) або (3.6), запишемо так:

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=C$$

або остаточно

$$\ln x+x+\ln y-y=C\,.$$

Приклад. Показати, що рівняння $\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)dx+(1-y)dy=0$ є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Розв'язання. Винесемо в першому доданку $\sqrt{x}$ за дужки, одержимо

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+1\right)dx+(1-y)dy=0\,,$$

тобто рівняння вигляду (3.5) – рівняння з відокремлюваними змінними або

$$\sqrt{x}dx+\frac{(1-y)}{\sqrt{y}+1}dy=0\,,$$

– рівняння з відокремленими змінними.

Однорідні рівняння першого порядку та рівняння, які зводяться до них.

Означення. *Функцію* $f(x,y)$ *називають однорідною функцією* n*-го виміру відносно змінних* x *і* y, *якщо за будь-якого* $\lambda=\text{const}$ *виконується тотожність*

$$f(\lambda\,x,\,\lambda\,y)\equiv\lambda^{n}\,f(x,y). \tag{3.7}$$

Приклад. Функція $f(x,y)=\sqrt[3]{x^{3}+y^{3}}$ – однорідна функція першого виміру, оскільки виконується тотожність (3.7) за $n=1$

$$f(\lambda\,x,\,\lambda\,y)=\sqrt[3]{\lambda^{3}x^{3}+\lambda^{3}y^{3}}=\lambda\sqrt{x^{3}+y^{3}}=\lambda\,f(x,y).$$

Означення. *Диференціальне рівняння першого порядку вигляду*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{3.8}$$

називають однорідним відносно змінних x *і* y, *якщо* $f(x,y)$ *є однорідна функція своїх аргументів нульового виміру, тобто якщо має місце тотожність*

$$f(\lambda\,x,\,\lambda\,y)\equiv f(x,y). \tag{3.9}$$

Іншими словами, якщо у рівнянні (3.8) кожен x і кожен y помножити на деяке число λ і після цього рівняння не зміниться, то воно є однорідне.

Приклад. Диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx}=-\frac{y+x}{x}$ є однорідне, тому що $f(x,y)=-\frac{y+x}{x}$ є однорідна функція нульового виміру відносно своїх аргументів, тобто виконується тотожність (3.9)

$$f(\lambda x,\ \lambda y) = -\frac{\lambda y + \lambda x}{\lambda \mathrm{x}} = -\frac{\lambda(y+x)}{\lambda x} - \frac{y+x}{x} = f(x,y).$$

Метод розв'язування. Поклавши в (3.9) $\lambda = \dfrac{1}{x}$, одержимо тотожність

$$f(x,y) \equiv f\left(1,\ \frac{y}{x}\right).$$

Оскільки в правій частині стоїть функція тільки одного аргументу $\dfrac{y}{x}$, то, позначаючи її через $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, однорідне рівняння завжди можна зобразити у вигляді

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.10}$$

За довільно заданої неперервної функції φ змінні не розділяються. Але оскільки в праву частину змінні входять тільки у комбінації $\dfrac{y}{x}$, то не виключено, що рівняння спроститься, якщо ввести нову невідому функцію $u = \dfrac{y}{x}$. Тоді

$$\begin{cases} y = u\,x, \\ y' = u'x + u. \end{cases} \tag{3.11}$$

Підставляючи (3.11) у (3.10), одержуємо $u + u'x = \varphi(u)$ або $x\,du = (\varphi(u) - u)dx$. Змінні розділяються, якщо обидві частини поділити на $x(\varphi(u) - u)$. Будемо мати

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln x + C\,. \tag{3.12}$$

Якщо в останньому виразі замінити u його значенням $\dfrac{y}{x}$, то одержимо загальний інтеграл рівняння (3.10).

Таким чином, будь-яке однорідне рівняння першого порядку вигляду (3.10) зводиться за допомогою підстановки (3.11) до рівняння з відокремлюваними змінними, у загальному розв'язку якого, змінюючи $u = \dfrac{y}{x}$ *, одержимо загальний розв'язок однорідного рівняння (3.10).*

Зауваження. *У випадку фактичного інтегрування однорідного рівняння не обов'язково зводити його до вигляду (3.10), досить переконатися в тім, що рівняння належить до розглянутого типу, і безпосередньо застосувати підстановку (3.11); застосовувати готову формулою (3.12) теж недоцільно.*

Зауваження. *Рівняння вигляду* $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ *буде однорідним тоді і тільки тоді, коли* $M(x,y)$ *і* $N(x,y)$ *є однорідні функції одного виміру. Це випливає з того, що відношення двох однорідних функцій однакового виміру є однорідною функцією нульового виміру.*

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y$.

Розв'язання. Визначимо тип рівняння. Для цього спочатку перевіримо умову (3.9):

$$\lambda\, xy'=\lambda\, xe^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}+\lambda\, y=\lambda\left(xe^{\frac{y}{x}}+y\right) \;\Leftrightarrow\; f(\lambda\, x,\lambda\, y)=f(x,y),$$

тобто дане рівняння – однорідне. Заміною (3.11) зводимо його до рівняння з відокремлюваними змінними відносно нової невідомої функції. Отже,

$$\begin{cases} y=u\,x, \\ y'=u'x+u. \end{cases}$$

Тоді

$$u'x+u=e^{u}+u,$$

$$\frac{du}{dx}x=e^{u}. \tag{3.13}$$

У такий спосіб одержали рівняння з відокремлюваними змінними з невідомою функцією $u(x)$.

Відокремлюємо змінні

$$e^{-u}du=\frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, одержуємо

$$\int e^{-u}du=\int\frac{dx}{x}, \quad e^{-u}=-\ln|x|+\ln|C|, \quad e^{-u}=\ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

Звідси загальний розв'язок рівняння (3.13) можемо записати у вигляді

$$u=-\ln\ln\left|\frac{C}{x}\right|. \tag{3.14}$$

Щоб записати загальний розв'язок заданого однорідного рівняння, необхідно за допомогою (3.11) повернутися до старої невідомої функції $y(x)$, тобто в (3.14) замість u підставити $u=\frac{y}{x}$. У результаті матимемо загальний інтеграл

$$\frac{y}{x}=\ln\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

або остаточно загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y=-x\ln\ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші

$$\left(x^2-2xy\right)dy+\left(y^2-xy\right)dx=0\ ,\qquad y(1)=1\,.$$

Розв'язання. Рівняння однорідне. Перепишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}\,.$$

Скориставшись заміною (3.11), зведемо останнє рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u-u^2}{1-2u},\qquad \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\left(\frac{u-u^2}{1-2u}-u\right)=\frac{1}{x}\frac{u^2}{1-2u}\,.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{(1-2u)du}{u^2}=\frac{dx}{x}\,.$$

Після інтегрування матимемо

$$\frac{1}{u}+2\ln|u|=-\ln|x|+\ln|C|,\qquad \ln\left(u^2e^{\frac{1}{u}}\right)=\ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

Остаточно загальний інтеграл рівняння з відокремлюваними змінними запишемо у вигляді

$$u^2e^{\frac{1}{u}}=\frac{C}{x}.$$

Тоді загальний інтеграл однорідного рівняння набуде вигляду

$$\frac{y^2}{x}e^{\frac{x}{y}}=C\,.$$

Визначимо значення довільної сталої C з початкової умови $y(1)=1$. Одержимо $C=e$. Тоді розв'язок задачі Коші запишемо у вигляді

$$\frac{y^2}{x}e^{\frac{x}{y}}=e\,.$$

Розглянемо тепер *рівняння, які зводяться до однорідного*. Вони мають вигляд

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\,, \tag{3.15}$$

де a, b, c, a_1, b_1, c_1 – const .

Якщо $c_1=c=0$, то рівняння (3.15) є однорідне. Нехай тепер c_1, c (або одне з них) відмінні від нуля.

Методи розв'язування.

1. Якщо

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

зробимо заміну змінних:

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k \qquad (h,\ k - \text{const}). \tag{3.16}$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}. \tag{3.17}$$

Підставляючи в співвідношення (3.17) вирази (3.15), (3.16), одержимо

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}. \tag{3.18}$$

Доберемо h і k так, щоб виконувалися рівності

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

тобто визначимо h і k як розв'язок системи рівнянь (3.19). За цієї умови рівняння (3.18) перетворюється на однорідне:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}.$$

Розв'язавши це рівняння і перейшовши знову до x і y за формулами (3.16), (3.17), одержимо розв'язок рівняння (3.15).

2. Система (3.19) не має розв'язку, якщо

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто $ab_1 = a_1b$. Але в цьому випадку $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b} = \lambda$, тобто $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ і, отже, рівняння (3.15) можна перетворити до вигляду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1}. \tag{3.20}$$

Тоді підстановкою

$$z = ax + by \tag{3.21}$$

рівняння (3.20) зводимо до рівняння з відокремлюваними змінними.

Дійсно,

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx},$$

звідки

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}. \qquad (3.22)$$

Підставляючи в рівняння (3.20) вираз (3.21) і (3.22), одержуємо

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}=\frac{z+c}{\lambda\, z+c_1},$$

це і є рівняння з відокремлюваними змінними.

Прийомом, застосованим до інтегрування рівняння (3.15), можна скористатися, інтегруючи рівняння

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),$$

де f – яка завгодно неперервна функція.

Приклад. Розв'язати рівняння $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-3}{x-y-1}$.

Розв'язання. Дане рівняння має вигляд (3.15) і належить до рівнянь, що зводяться до однорідного. Зробимо заміну змінних:

$$\begin{cases} x=x_1+h, \\ y=y_1+k. \end{cases}$$

Тоді дане рівняння набуде вигляду

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1+h+k-3}{x_1-y_1+h-k-1}.$$

Розв'язуючи систему двох рівнянь

$$\begin{cases} h+k-3=0, \\ h-k-1=0, \end{cases}$$

знаходимо $h=2$, $k=1$. У результаті одержуємо однорідне рівняння

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1},$$

яке розв'язуємо підстановкою

$$\begin{cases} y_1=u\,x_1, \\ y_1{}'=u'x_1+u. \end{cases}$$

Відтак маємо наступне рівняння з відокремлюваними змінними

$$u+x_1u'=\frac{1+u}{1-u}$$

або

$$x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u^2}{1-u}.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Інтегруючи, знаходимо загальний інтеграл

$$\operatorname{arctg} u = \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| + \ln|x_1| + \ln|C|, \qquad \operatorname{arctg} u = \ln\left|Cx_1\sqrt{1+u^2}\right|.$$

Звідси

$$Cx_1\sqrt{1+u^2} = e^{\operatorname{arctg} u}.$$

Підставляючи $u = \frac{y_1}{x_1}$, одержуємо

$$Cx_1\sqrt{1+\frac{y_1^2}{x_1^2}} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}}.$$

Нарешті, переходячи до змінних x і y, остаточно одержуємо загальний інтеграл

$$C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}.$$

Приклад. Розв’язати рівняння $y' = \dfrac{2x+y-1}{4x+2y+5}$**.**

Розв’язання. Це рівняння вже не можна розв’язувати підстановкою (3.16), тому що в цьому випадку система рівнянь, призначена для визначення h і k, має визначник, який дорівнює нулю (переконайтеся самостійно). Це рівняння можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними заміною (3.21), тобто $2x+y=z.$ Тоді $y' = z'-2$ і рівняння зводиться до вигляду

$$z'-2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

або

$$z' = \frac{5z+9}{2z+5}.$$

Розв’язуючи його, знаходимо загальний інтеграл

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|5z+9| = x + C.$$

Оскільки $z = 2x+y$, то ми одержимо остаточно загальний інтеграл заданого рівняння у вигляді

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25}\ln|10x+5y+9| = x + C$$

або

$$10y - 5x + 7\ln|10x+5y+9| = C.$$

Лінійні рівняння першого порядку

Означення. *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, лінійне відносно невідомої функції і її похідної. Воно має вигляд*

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x), \tag{3.23}$$

де $y=y(x)$ *– невідома функція;* $P(x)$ *і* $Q(x)$ *– неперервні функції в області зміни* x*; коефіцієнт при похідній без обмеження спільності візьмемо дорівнюваним одиниці.*

Якщо $Q(x)\equiv 0$, то рівняння (3.23) має вигляд

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \tag{3.24}$$

і його називають *лінійним однорідним* (або без правої частини), а рівняння (3.23) – *неоднорідним.* Однорідне лінійне рівняння (3.24) являє собою рівняння з відокремлюваними змінними й інтегрується однією квадратурою:

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx,$$

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|,$$

Таким чином, його загальний розв'язок має вигляд

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{3.25}$$

Формула (3.25) дійсно дає загальний розв'язок рівняння (3.24), тому що серед втрачених розв'язків міг бути тільки розв'язок $y=0$, а він міститься у (3.25) за $C=0$.

Розв'язок диференціального рівняння, який не можна одержати з загального ні за якого значення довільної сталої C, називають *особливим розв'язком.*

Методи розв'язування. 1. Для розв'язування лінійного неоднорідного рівняння (3.23) розглянемо спочатку *метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)*, суть якого полягає у тому, що у виразі (3.25) C вважають не сталою, а невідомою функцією від x і $C(x)$ знаходять у такому вигляді, щоб функція

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{3.26}$$

була розв'язком неоднорідного диференціального рівняння (3.23). Підставляючи (3.26) в рівняння (3.23), одержуємо

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}-C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

або

$$\frac{dC(x)}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Звідси

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1,$$

де C_1 – довільна стала.

Підставляючи знайдене значення $C(x)$ у вираз (3.26), одержуємо загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння (3.23)

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1\right]. \qquad (3.27)$$

Зазначимо, що розв'язок (3.27) являє собою суму двох доданків:

1) $C_1e^{-\int P(x)dx}$ є загальний розв'язок однорідного рівняння (3.24), що відповідає неоднорідному рівнянню (3.23);

2) $e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx$ є частинний розв'язок неоднорідного рівняння (він виходить із загального розв'язку (3.27), якщо покласти $C_1=0$).

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'+y=\sin x$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійне, тому що $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$ – відповідає загальному вигляду лінійного неоднорідного рівняння (3.23). Для розв'язання цього рівняння скористаємося методом варіації довільної сталої.

1) знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'+\frac{y}{x}=0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Тоді

$$y'=-\frac{y}{x} \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|$$

або остаточно

$$y=\frac{C}{x};$$

2) нехай $C=C(x)$. Шукатимемо цю функцію у такому вигляді, щоб вираз

$$y=\frac{C(x)}{x} \qquad (3.28)$$

був розв'язком заданого неоднорідного рівняння

Підставляючи (3.28) в задане рівняння, одержуємо

$$\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{x}C'(x)=\frac{\sin x}{x}, \quad C'(x)=\sin x.$$

Інтегруючи, маємо $C(x)=-\cos x+C_1$;

3) підставляючи $C(x)$ в (3.28), одержуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y=\frac{1}{x}(C_1-\cos x).$$

2. Для розв'язування лінійного неоднорідного рівняння (3.23) можна скористатися ще *методом заміни невідомої функції (метод Бернуллі)*, відповідно до якого загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$y(x) = u(x)v(x), \tag{3.29}$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – диференційовані функції. Тоді

$$y' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \tag{3.30}$$

і підстановка (3.29), (3.30) в (3.23) дає рівняння

$$v(x)\frac{du(x)}{dx} + u(x)\left(\frac{dv(x)}{dx} + P(x)v(x)\right) = Q(x). \tag{3.31}$$

Функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ доберемо так, щоб їх добуток задовольняв рівняння (3.23). Визначимо функцію v таким чином, щоб коефіцієнт при u перетворився на нуль:

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0,$$

звідси

$$v = Ce^{-\int P(x)\,dx}.$$

Для функції v нам досить взяти частинний розв'язок, наприклад за $C = 1$, тобто

$$v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Тоді (3.31) зводиться до рівняння

$$v\frac{du}{dx} = Q(x).$$

Підставляючи сюди знайдене $v(x)$, отримуємо

$$du = e^{\int P(x)\,dx}Q(x)dx.$$

Інтегруючи, одержуємо

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}Q(x)dx + C_1.$$

Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у вираз (3.29), одержимо загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння (3.23) у вигляді

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right],$$

як і у випадку застосування методу варіації довільної сталої.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

Розв'язання. Скористаємося методом заміни невідомої функції. Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + v'u$ і дане рівняння набуває вигляду

$$u'v + v'u - \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^3$$

або винесенням у другому і третьому доданках у лівій частині u за дужки одержимо рівняння

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x+1}\right) = (x+1)^3.$$

Далі, визначимо функцію v таким чином, щоб коефіцієнт при u перетворився на нуль:

$$v' - \frac{2v}{x+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{2v} = \frac{dx}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln|v| = \ln|x+1|.$$

Тоді

$$v = (x+1)^2.$$

За умови перетворення на нуль коефіцієнта при функції u, матимемо наступне рівняння для визначення функції u:

$$u'v = (x+1)^3.$$

Підставляючи сюди знайдену функцію v, одержуємо

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = x+1.$$

Після інтегрування матимемо остаточний вираз для функції u

$$u = \frac{x^2}{2} + x + C_1.$$

Тоді загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = (x+1)^2\left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right).$$

Таким чином, за допомогою методу Бернуллі лінійне неоднорідне рівняння зводиться до розв'язання двох рівнянь з відокремлюваними змінними для визначення функцій u і v.

Рівняння Бернуллі. *Рівняння Бернуллі* має вигляд

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n. \tag{3.32}$$

Тут $P(x)$, $Q(x)$ – задані неперервні функції в області зміни x; $y = y(x)$ – невідома функція; n – деяке число. За $n = 0$ маємо неоднорідне лінійне рівняння вигляду (3.23), за $n = 1$ –

$$\frac{dy}{dx} + (P(x) - Q(x))y = 0$$

– однорідне лінійне диференціальне рівняння. Отже, надалі будемо припускати $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Метод розв'язування. Поділимо обидві частини рівняння (3.32) на y^n (поклавши $y \neq 0$), одержимо

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x). \tag{3.33}$$

Перший член з точністю до сталого коефіцієнта дорівнює похідній від множника при $P(x)$, тобто від y^{-n+1}. Тому введемо нову функцію

$$z = y^{-n+1}, \tag{3.34}$$

тоді

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}. \tag{3.35}$$

Ураховуючи (3.34), (3.35), рівняння (3.33) перепишемо у вигляді

$$\frac{y^{-n}}{(-n+1)y^{-n}}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x).$$

Помноживши останнє рівняння на $(-n+1)$, одержимо лінійне неоднорідне рівняння відносно функції z

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)P(x)z = (-n+1)Q(x), \tag{3.36}$$

яке можна розв'язати одним із викладених вище методів.

Підставивши в загальний розв'язок рівняння (3.36) замість z вираз y^{-n+1}, одержимо загальний інтеграл рівняння Бернуллі. У випадку $n > 0$ маємо ще розв'язок $y = 0$.

Приклад. Розв'язати рівняння $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} - 4\frac{y}{x} = x\sqrt{y}.$$

Це рівняння Бернуллі. Тут $n = \frac{1}{2}$. Поділимо обидві частини рівняння на $x\sqrt{y}$:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Уведемо нову функцію: $z = \sqrt{y}$, тоді $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}$. Відтак дане рівняння набуде вигляду

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}.$$

Це лінійне неоднорідне рівняння відносно невідомої функції z. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд (одержати самостійно)

$$z = x^2\left(C_1 + \frac{1}{2}\ln x\right).$$

Повертаючись до функції y, одержимо загальний розв'язок рівняння Бернуллі у вигляді

$$y = x^4\left(C_1 + \frac{1}{2}\ln x\right)^2.$$

Зауваження. *У разі фактичного інтегрування рівняння Бернуллі не обов'язково зводити його до вигляду (3.36), а досить застосувати до нього відразу підстановку (3.29).*

Приклад. Розв'язати рівняння $y - xy' = y^2$.

Розв'язання. Дане рівняння можна переписати у вигляді $y' - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$. Для розв'язання цього рівняння скористаємося підстановкою (3.29), тобто

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + v'u.$$

Тоді задане рівняння набуде вигляду

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = -\frac{u^2v^2}{x}.$$

Функцію v, як і у випадку застосування методу Бернуллі до лінійних рівнянь, визначимо з рівняння

$$v' - \frac{v}{x} = 0.$$

Звідси $v = x$. Функцію u визначимо з рівняння

$$u'v = -\frac{u^2v^2}{x}.$$

Підставляючи сюди $v = x$, одержуємо

$$u'x = -\frac{u^2x^2}{x}$$

або, після інтегрування, остаточний вираз для функції u

$$u = \frac{1}{x - C}.$$

Тоді загальний розв'язок даного рівняння Бернуллі матиме вигляд

$$y = \frac{x}{x - C}.$$

4. РІВНЯННЯ У ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ. ІНТЕГРУВАЛЬНИЙ МНОЖНИК

Рівняння у повних диференціалах. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку в диференціальній формі

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{4.1}$$

Означення. *Рівняння (4.1) називають рівнянням у повних диференціалах, якщо його ліва частина є повний диференціал деякої функції* $u = u(x, y)$, *тобто*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \equiv du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Ця тотожність рівносильна двом іншим:

$$M(x, y) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x, y) \equiv \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.2}$$

Якщо ці умови виконані, то одержимо загальний інтеграл рівняння у повних диференціалах

$$u(x, y) = C. \tag{4.3}$$

Визначимо умову, за допомогою якої встановлюють, чи є дане диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах чи ні.

Теорема. *Нехай неперервні функції* $M(x, y)$ *і* $N(x, y)$, *коефіцієнти рівняння (4.1) в області його визначення* D *мають неперервні частинні похідні* $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$ *і* $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. *Для того щоб диференціальне рівняння (4.1) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб в області* D *виконувалася умова*

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \tag{4.4}$$

Доведення. Необхідність випливає з умов (4.2) після їх диференціювання: першого – по y, другого – по x і застосування теореми про рівність змішаних похідних.

Достатність буде доведена, якщо з умови (4.4) знайдемо функцію $u(x, y)$, яка б задовольняла умову (4.2). Для цього перше з рівнянь (4.2) проінтегруємо по x у межах від x_0 до x, уважаючи y сталою:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y). \tag{4.5}$$

Далі покажемо, що за виконання умови (4.4) в рівнянні (4.5) можна дібрати функцію $\varphi(y)$ так, щоб виконувалося і друге співвідношення в (4.2). Диференціюючи (4.5) по параметру y, одержуємо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx + \varphi'(y)$$

або, послуговуючись умовою (4.4), –

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y)=N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y).$$

Для виконання другої з умов (4.2) необхідно взяти

$$\varphi'(y)=N(x_0,y),$$

звідси

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy.$$

Таким чином, функція $u(x,y)$ знайдена. Виходячи з тотожності її довільній сталій, запишемо загальний інтеграл рівняння (4.1) у вигляді

$$u(x,y)\equiv\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy=C,$$

що і треба було довести.

Викладене доведення достатності умови (4.4) уможливлює водночас і визначення функції $u(x,y)$, тобто ***метод розв'язування*** рівняння у повних диференціалах. Як це можна зробити за допомогою невизначеного інтеграла, розглянемо на прикладі.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'=\dfrac{2xy+3y^2}{2y-6xy-x^2}$.

Розв'язання. Це рівняння не належить до жодного з вивчених у попередніх параграфах типів. Запишемо його у диференціальній формі

$$\left(2xy+3y^2\right)dx+\left(x^2+6xy-2y\right)dy=0,$$

тоді

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2x+6y,\quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2x+6y,$$

тобто виконується умова (4.4). Дане рівняння є рівняння в повних диференціалах. Отже, існує функція $u(x,y)$, що задовольняє умову

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy+3y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^2+6xy-2y.$$

Інтегруючи перше рівняння по x, одержуємо

$$u(x,y)=\int\left(2xy+3y^2\right)dx+\varphi(y)=x^2y+3y^2x+\varphi(y).$$

Диференціюючи останній вираз по y, маємо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+6yx+\varphi'(y).$$

Прирівнюючи тепер два вирази для $\frac{\partial u}{\partial y}$, одержуємо

$$x^2+6xy-2y=x^2+6yx+\varphi'(y),$$

звідси

$$\varphi'(y)=-2y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y)=-y^2+C.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння набуває вигляду

$$x^2y+3y^2x-y^2=C.$$

Таким чином, на практиці виявляється, що зручніше диференціювати (4.5) по y і, заміняючи $\frac{\partial u}{\partial y}$ відомою функцією $N(x,y)$, визначати з одержаної рівності $\varphi'(y)$, а потім знаходити $\varphi(y)$ квадратурою.

Інтегрувальний множник. Якщо ліва частина рівняння (4.1) не є повний диференціал деякої функції, то виникає питання – чи можна знайти таку функцію $\mu=\mu(x,y)$, щоб, помноживши на неї ліву частину рівняння (4.1), перетворити її на повний диференціал.

Означення. *Множник* μ *такий, що вираз*

$$\mu(x,y)[M(x,y)dx+N(x,y)dy],$$

є повний диференціал деякої функції, називають інтегрувальним множником.

Розглянемо *властивості інтегрувального множника.*

1. *Якщо для рівняння (4.1) існує загальний інтеграл (4.3), то для цього рівняння існує інтегрувальний множник.*

Доведення. Дійсно, диференціюючи (4.3), одержуємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=-\frac{u'_x}{u'_y},$$

але з рівняння (4.1)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Отже,

$$-\frac{u'_x}{u'_y}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \;\Rightarrow\; \frac{u'_x}{M(x,y)}=\frac{u'_y}{N(x,y)}.$$

Прирівнюючи ці відношення до $\mu(x,y)$, будемо мати

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu(x,y)M(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\mu(x,y)N(x,y),$$

а це означає, що $\mu(x,y)$ є інтегрувальний множник, тобто його існування в цьому випадку доведено.

2. *Число інтегрувальних множників рівняння (4.1) нескінченне.*

Доведення. Справді, нехай $\mu=\mu(x,y)$ є будь-який інтегрувальний множник рівняння (4.1), а $u(x,y)=C$ – загальний інтеграл цього рівняння. Тоді $\mu_1=\varphi(u)\mu$, де $\varphi(u)$ – довільна диференційовна функція, є також інтегрувальний множник.

Дійсно, вираз

$$\mu_1[M(x,y)dx+N(x,y)dy]=\varphi(u)\mu[M(x,y)dx+N(x,y)dy]=\varphi(u)du$$

є повний диференціал від функції $\Phi(u)=\int\varphi(u)du$. Отже,

$$\mu_1=\varphi(u)\mu \tag{4.6}$$

є інтегрувальний множник рівняння (4.1).

Такий процес можна продовжити до нескінченності і показати, що всякий інтегруючий множник рівняння (4.1) визначється формулою (4.6).

Визначення інтегрувального множника. Із означення інтегрувального множника маємо

$$\frac{\partial[\mu M(x,y)]}{\partial y}=\frac{\partial[\mu N(x,y)]}{\partial x}$$

або

$$N(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial x}-M(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)\mu. \tag{4.7}$$

Поділивши обидві частини рівності (4.7) на μ, матимемо

$$N(x,y)\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}-M(x,y)\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{4.8}$$

У такий спосіб ми одержали рівняння у частинних похідних для визначення невідомої функції $\mu=\mu(x,y)$, інтегрування якого є досить складна задача. Тому розглянемо лише випадки, коли вдається знайти його деякі розв'язки відносно просто.

1. Розглянемо випадок, коли існує інтегрувальний множник, який залежить тільки від x. За таких умов $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$ і рівняння (4.8) перепишемо у вигляді

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)}. \tag{4.9}$$

Для існування інтегрувального множника, який залежить тільки від x, необхідно і достатньо, щоб права частина рівняння (4.9) залежала тільки від x, тоді $\mu(x)$ знаходимо однією квадратурою і запишемо так:

$$\mu(x)=Ce^{\int\varphi(x)dx},\quad \varphi(x)=\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)}.$$

Можна вважати, що $C=1$, оскільки досить мати лише один інтегрувальний множник.

Приклад. Знайти інтегрувальний множник рівняння

$$\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0\,.$$

Розв'язання. Знаходимо:

$$\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)}=\frac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}=1.$$

Отже, з (4.9)

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=1\,,\qquad \mu=e^x\,.$$

2. У випадку, коли інтегрувальний множник залежить тільки від y, тобто $\mu=\mu(y)$, рівняння (4.8) має вигляд

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{-M(x,y)}.$$

Міркуючи аналогічно попередньому випадку, для інтегрувального множника одержимо вираз

$$\mu(y)=e^{\int\psi(y)dy},\quad \psi(y)=\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{-M(x,y)}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $xy'=\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y$, якщо відомо, що воно має інтегрувальний множник як функцію однієї змінної x або y.

Розв'язання. Зобразимо дане рівняння у вигляді

$$\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y\,dx-x\,dy=0 \tag{4.10}$$

і обчислимо значення виразу

$$M'_y(x,y)-N'_x(x,y)=-3x^2 2\cos y\sin y-\cos 2y+1=-2\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\sin y\,.$$

Якщо одержаний вираз поділимо на $-\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y=-M(x,y)$, то частка виявиться функцією тільки від y; отже, інтегрувальний множник μ є функція від y. Знайдемо його з рівняння

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}=\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{-M(x,y)}=2\,\mathrm{tg}\,y\,;\qquad \frac{d\mu}{\mu}=2\mathrm{tg}\,y\,dy\,,$$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=2\int\mathrm{tg}\,y\,dy\,,\qquad \ln|\mu|=-2\ln|\cos y|+\ln C\,.$$

Як інтегрувальний множник візьмемо $\mu(y)=\dfrac{1}{\cos^2 y}$. Множачи обидві частини рівняння (4.10) на $\dfrac{1}{\cos^2 y}$, одержимо рівняння у повних диференціалах:

$$\left(3x^2-\operatorname{tg} y\right)dx-\frac{x}{\cos^2 y}dy=0.$$

Розв'яжемо його:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-\operatorname{tg} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{\cos^2 y},$$

$$u(x,y)=\int\left(3x^2-\operatorname{tg} y\right)dx=x^3-x\operatorname{tg} y+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3-x\operatorname{tg} y+\varphi(y)\right)=-\frac{x}{\cos^2 y}, \quad -\frac{x}{\cos^2 y}+\varphi'(y)=-\frac{x}{\cos^2 y},$$

$$\varphi'(y)=0, \quad \varphi(y)=\mathrm{const}=C.$$

Отже, $u(x,y)=x^3-x\operatorname{tg} y$, $x^3-x\operatorname{tg} y=C$. Відзначимо, що під час ділення заданого рівняння на $\cos^2 y$ були втрачені розв'язки $y=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.

3. У більш загальному випадку, коли інтегрувальний множник є функцією відомої функції, тобто $\mu=\mu(z)$, а $z=z(x,y)$ – відома функція, рівняння (4.8) має вигляд

$$\frac{d\ln\mu}{dz}=\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)z'_x-M(x,y)z'_y}.$$

Звідси

$$\mu(z)=e^{\int\xi(z)dz}, \quad \xi(z)=\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)z'_x-M(x,y)z'_y}.$$

На практиці для визначення інтегрувального множника часто застосовують такий прийом: усі члени рівняння розбивають на дві групи, для кожної з яких легко визначити один інтегрувальний множник; потім пишуть вираз найбільш загального інтегрувального множника для кожної групи і розмірковують, чи можна вибрати довільні функції, що входять у цей вираз, так, щоб обидва інтегрувальні множники виявилися однаковими; якщо це можливо, то інтегрувальний множник рівняння знайдено.

5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, НЕРОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

Теорема існування та єдиності розв'язку. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку в загальному вигляді (нерозв'язаному відносно похідної)

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (5.1)$$

З формального погляду можна сказати, що, розв'язуючи це рівняння відносно похідної, матимемо не один, а декілька дійсних розв'язків $y' = f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, ...)$, і тоді кожний із цих розв'язків визначає в довільній точці (x_0, y_0) свій напрям. Тому властивість єдиності розв'язку рівняння (5.1) за умови $y(x_0) = y_0$ слід розуміти так, що через дану точку (x_0, y_0) в даному напрямі проходить не більш однієї інтегральної кривої рівняння (5.1).

Теорема. *Якщо в деякому замкненому околі точки (x_0, y_0, y_0'), де y_0' – один із дійсних коренів рівняння $F(x_0, y_0, y_0') = 0$, виконуються умови*

1) *функція $F(x, y, y')$ неперервна за трьома аргументами;*
2) *існує обмежена за абсолютною величиною похідна F_y', тобто $|F_y'| \le L$;*
3) *похідна $F_{y'}'$ існує і відмінна від нуля,*

тоді в проміжку $x_0 - h_0 \le x \le x_0 + h_0$, де h_0 – досить мале число, існує єдиний розв'язок рівняння (5.1), який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$ та для якого $y'(x_0) = y_0'$.

Розглянемо деякі випадки диференціальних рівнянь (5.1), для яких можна визначити способи відшукання їх розв'язків. При цьому усе буде залежати від вигляду функції F і її властивостей.

Насамперед, відзначимо: у разі можливості розв'язати рівняння (5.1) відносно похідної одержуємо одне або кілька рівнянь, що можуть належати до розглянутих раніше типів. Сукупність загальних розв'язків або загальних інтегралів останніх і складає в цьому випадку загальний інтеграл рівняння (5.1).

Рівняння n-го степеня. Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$a_0(x,y)(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + ... + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0, \qquad (5.2)$$

де $a_i(x, y)$, $i = 0, 1, ..., n$ – функції, неперервні в деякій області D площини xOy. Рівняння вигляду (5.2) називають *диференціальним рівнянням першого порядку n-го степеня.*

Нехай в області D функція $a_0(x, y) \ne 0$. Тоді, згідно з основною теоремою алгебри, рівняння (5.2) для всякої пари значень x, y у розглянутій області має n дійсних і уявних розв'язків для y'. Нехтуючи уявні розв'язки для y', матимемо $k \le n$ диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної:

$$y_i' = f_i(x, y), \quad i = 1, 2, ..., k. \qquad (5.3)$$

Кожне з цих рівнянь задає в деякій області D_1 площини xOy своє поле напрямків. Якщо $f_i(x, y)$ в області D_1 задовольняють умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, то через кожну точку області D_1 проходить k інтегральних кривих диференціального рівняння (5.2). Щоб знайти ці криві, треба проінтегрувати кожне з рівнянь (5.3). Сукупність одержаних таким чином загальних розв'язків

$$y_i = \varphi_i(x, C),$$

або загальних інтегралів

$$\Phi_i(x, y, C) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

де C – довільна стала, є загальним інтегралом рівняння (5.2).

Приклад. Знайти розв'язок рівняння

$$y'^2 - (x + y)y' + xy = 0.$$

Розв'язання. Розглядаючи дане рівняння як квадратне відносно y', одержуємо два рівняння першого порядку, розв'язаних відносно похідної:

$$y_1' = x, \quad y_2' = y.$$

Після інтегрування кожного з цих рівнянь знаходимо їх загальні розв'язки:

$$y_1 = \frac{x^2}{2} + C, \quad y_2 = Ce^x,$$

які у сукупності складають загальний інтеграл даного рівняння. Зазначимо, що інтегральними кривими будуть також криві, утворені з дуг обох сімейств розв'язків, якщо в загальних точках ці дуги мають загальну дотичну.

Рівняння, що залежить тільки від похідної **.** Нехай тепер функція F у рівнянні (5.1) залежить тільки від y', тобто це рівняння запишемо у вигляді

$$F(y') = 0. \tag{5.4}$$

Нехай тепер це рівняння має деяке скінченне або нескінченне число дійсних коренів $y' = k_i$, що цілком не заповнюють деякий інтервал, за таких умов $y = k_i x + C$ або $k_i = \dfrac{y - C}{x}$. Одержуємо загальний інтеграл рівняння (5.4) у вигляді

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \tag{5.5}$$

Приклад. Диференціальне рівняння $y'^3 - 3y'^2 + 2 = 0$ має загальний інтеграл

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y - C}{x}\right)^2 + 2 = 0.$$

У разі коли згадані вище корені заповнюють цілком деякий інтервал, рівняння (5.4) може мати розв'язки, відмінні від (5.5).

Рівняння, яке не містить явно невідомої функції у. Під час розв'язування рівнянь (5.1), у випадках коли функція F залежить тільки від x і y', доцільно скористатися *параметричним інтегруванням (метод уведення параметра).*

Отже, розглянемо рівняння вигляду

$$F(x, y') = 0 . \tag{5.6}$$

Припустимо, що це рівняння можна записати у параметричній формі:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Скориставшись рівністю $dy = y'dx$, матимемо

$$dy = \psi(t)\varphi'(t)dt ,$$

звідси

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C .$$

Таким чином, загальний інтеграл рівняння (5.6) запишемо в параметричній формі

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C . \tag{5.7}$$

У випадку коли із системи рівнянь (5.7) можна виключити параметр t, з'являється можливість знайти загальний розв'язок у вигляді $y = \omega(x,C)$ або загальний інтеграл $\Phi(x,y,C) = 0$ рівняння (5.6).

Якщо рівняння (5.6) легко розв'язати відносно x, тобто $x = \varphi(y')$, то як параметр зручно ввести $y' = t$, тоді

$$x = \varphi(t), \quad y = \int t\varphi'(t)dt + C . \tag{5.8}$$

Приклад. Розв'язати рівняння $x^3 y' - (1 - y')^3 = 0$.

Розв'язання. Розв'язуючи дане рівняння відносно x, одержуємо

$$x = \frac{(1 - y')}{\sqrt[3]{y'}} .$$

Це рівняння в параметричній формі можна записати так:

$$y' = t , \quad x = \frac{1 - t}{\sqrt[3]{t}} ,$$

тоді його загальний розв'язок відповідно до формули (5.8) має вигляд

$$x = \frac{1 - t}{\sqrt[3]{t}} , \quad y = \int t \left(\frac{-\sqrt[3]{t} - \frac{1}{3} t^{-2/3}(1 - t)}{t^{2/3}} \right) dt + C$$

або остаточно –

$$x = \frac{1 - t}{\sqrt[3]{t}} , \quad y = -\frac{2}{5} t^{5/3} - \frac{1}{2} t^{2/3} + C.$$

Рівняння, що не містить явно незалежної змінної. Мало чим у цьому випадку відрізняється інтегрування рівняння

$$F(y,y')=0. \qquad (5.9)$$

Нехай це рівняння можна записати у параметричній формі:

$$y=\varphi(t), \qquad y'=\psi(t).$$

Тоді для визначення залежності змінної x від параметра запишемо:

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}, \qquad x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+C,$$

інтегральні криві в параметричній формі визначимо рівняннями

$$x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+C, \qquad y=\varphi(t). \qquad (5.10)$$

За умови досить легкого розв'язання рівняння (5.9) відносно y, тобто $y=\varphi(y')$, беручи $y'=t$, маємо

$$x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{t}+C, \qquad y=\varphi(t).$$

Зауваження. *В останньому випадку діленням на t, припускаючи $t\neq 0$, можна втратити розв'язки $y=k_i$, де k_i – дійсні корені рівняння $F(y,0)=0$. Тому цей випадок треба розглядати окремо. Якщо рівняння $F(y,0)=0$ має дійсні корені $y=k_i$, які обов'язково будуть розв'язками рівняння (5.9) і не будуть входити у загальний інтеграл, то вони можуть бути особливими розв'язками рівняння (5.9).*

Приклад. Розв'язати рівняння $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=1$.

Розв'язання. Покладемо $y'=\operatorname{sh}t$, тоді згідно з (5.10)

$$y=\operatorname{ch}t, \qquad x=t+C.$$

Виключивши параметр t, одержимо загальний розв'язок даного рівняння у вигляді

$$y=\operatorname{ch}(x-C).$$

Загальний метод уведення параметра. Рівняння Лагранжа і Клеро. Розглянемо рівняння

$$F(x,y,p)=0, \qquad (5.11)$$

де $p=y'$.

Якщо ми будемо розглядати x, y, p, як декартові координати в просторі, то рівняння (5.11) визначить деяку поверхню. Відомо, що координати точок поверхні можуть бути виражені як функції двох параметрів u, v. Нехай нам відомо таке параметричне зображення поверхні (5.11):

$$x=\varphi(u,v), \qquad y=\psi(u,v), \qquad p=\theta(u,v). \qquad (5.12)$$

Скориставшись залежністю $dy=y'dx$, матимемо

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right),$$

звідси одразу одержимо рівняння, розв'язане відносно похідної, з відомою правою частиною:

$$\frac{dv}{du}=\frac{\theta\varphi'_u-\psi'_u}{\psi'_v-\theta\varphi'_v}. \tag{5.13}$$

Його загальний розв'язок запишемо у вигляді

$$v=\omega(u,C),$$

тоді загальний розв'язок рівняння (5.11) одержимо в параметричній формі безпосередньо з (5.12):

$$x=\varphi[u,\omega(u,C)],\qquad y=\psi[u,\omega(u,C)].$$

Перетворення (5.12) так само застосовують у випадку, якщо рівняння (5.11) розв'язують відносно x або y. Тоді у виразі (5.12) за параметри зручніше взяти y і p або x і p відповідно.

Однак слід зауважити, що загальний розв'язок рівняння (5.13), узагалі кажучи, не можна одержати в квадратурах. Зараз ми розглянемо тип рівнянь, нерозв'язаних відносно похідної, застосування до яких методу диференціювання завжди приводить до рівняння, що інтегрується в квадратурах. Це *рівняння Лагранжа*. Так називають рівняння, лінійне відносно x і y, тобто рівняння вигляду

$$A(p)y+B(p)x=C(p),$$

де коефіцієнти $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ – відомі диференційовні функції похідної $p=y'$. Розв'язуючи це рівняння відносно y (діленням на $A(p)\neq 0$), зводимо його до вигляду

$$y=\varphi(p)x+\psi(p). \tag{5.14}$$

Диференціюючи обидві частини рівняння (5.14), одержуємо

$$p=\varphi(p)+x\varphi'(p)\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Нехай $\frac{dp}{dx}\neq 0$, тоді, поділивши останній вираз на $\frac{dp}{dx}$, матимемо рівняння

$$[p-\varphi(p)]\frac{dx}{dp}=x\varphi'(p)+\psi'(p),$$

лінійне відносно невідомої функції x змінної p. Коли $p-\varphi(p)\neq 0$, це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}.$$

Інтегруючи його відомими методами (як лінійне неоднорідне рівняння першого порядку відносно функції $x(p)$), одержуємо його загальний розв'язок у вигляді

$$x = \Phi(p)C + \Psi(p),$$

де $\Phi(p)$ і $\Psi(p)$ – відомі функції, а C – довільна стала.

Беручи до уваги співвідношення (5.14), загальний розв'язок рівняння Лагранжа запишемо в параметричному вигляді:

$$x = \Phi(p)C + \Psi(p), \qquad y = \Phi_1(p)C + \Psi_1(p), \tag{5.15}$$

де функції $\Phi_1(p)$ і $\Psi_1(p)$, як видно, досить просто визначити функціями $\varphi(p)$, $\psi(p)$, $\Phi(p)$, $\Psi(p)$.

Під час ділення на $\frac{dp}{dx}$ ми могли втратити розв'язки, якщо вони існують, для яких $\frac{dp}{dx} = 0$, тобто $p = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$. Це можливо для тих значень p_i, які до тогож є коренями рівняння $p - \varphi(p) = 0$. У цьому випадку рівняння Лагранжа буде мати ще розв'язок:

$$y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y = 2y'x + y'^2$.

Розв'язання. Позначимо $y' = p$, одержимо рівняння Лагранжа

$$y = 2px + p^2.$$

Диференціюємо останнє рівняння по x, уважаючи p і y функціями x, і, заміняючи y' через p, маємо

$$p = 2p + 2(x + p)p'.$$

Розв'язуючи відносно $\frac{dx}{dp}$, знаходимо

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2.$$

Розв'язком цього рівняння є функція $x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}$.

Підставляючи цей вираз у співвідношення для y, згідно з (5.15), одержуємо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}, \quad x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}.$$

Розглянемо тепер окремо випадок, коли

$$\varphi(p) - p \equiv 0.$$

Іншими словами, випадок рівняння (5.14) у вигляді

$$y = xp + \psi(p), \tag{5.16}$$
який називають *рівнянням Клеро,* і є окремий випадок рівняння Лагранжа.

Диференціюючи (5.16) по x, одержуємо
$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$
або
$$\left[x + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0\,. \tag{5.17}$$
Звідси, ураховуючи спочатку, що $\frac{dp}{dx} = 0$, тобто $p = C$, одержуємо з (5.16), виключивши p, однопараметричну сім'ю інтегральних прямих
$$y = Cx + \psi(C). \tag{5.18}$$
Співвідношення (5.18) – це загальний розв'язок рівняння Клеро.

Таким чином, щоб знайти загальний розв'язок рівняння Клеро, треба в це рівняння замість y' підставити C.

Співвідношення (5.16) і (5.17) визначають ще один розв'язок рівняння:
$$y = xp + \psi(p), \qquad x + \psi'(p) = 0\,. \tag{5.19}$$
Можна показати, що інтегральна крива, яку визначають рівнянням (5.19), є особливий розв'язок рівняння Клеро.

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яке рівняння називають диференціальним?
2. Що називають розв'язком диференціального рівняння? Як називають операцію знаходження розв'язку диференціального рівняння?
3. Яке рівняння називають диференціальним рівнянням першого порядку?
4. Що називають загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку? Чим відрізняється загальний розв'язок диференціального рівняння від його загального інтеграла?
5. Що називають частинним розв'язком диференціального рівняння?
6. У чому полягає геометричний зміст розв'язків диференціального рівняння?
7. Що означає «розв'язати диференціальне рівняння»?
8. Якою є геометрична інтерпретація диференціального рівняння першого порядку?
9. Які рівняння називають рівняннями з відокремлюваними змінними? Як інтегрують такі рівняння?
10. Які рівняння називають однорідними? Метод їх розв'язування.
11. Які рівняння зводяться до однорідних? Методи їх розв'язування.
12. Яке рівняння називають лінійним диференціальним рівнянням першого порядку? Методи їх інтегрування.

13. Який вигляд має рівняння Бернуллі? Які методи застосовують під час розв'язування рівняння Бернуллі?

14. Яке рівняння називають рівнянням у повних диференціалах?

15. Яка необхідна і достатня умова того, щоб диференціальне рівняння було рівнянням у повних диференціалах?

16. У чому полягає метод інтегрування рівняння у повних диференціалах?

17. Який множник називають інтегрувальним, його властивості?

18. Які ви знаєте основні типи диференціальних рівнянь першого порядку, нерозв'язаних відносно похідної?

19. У чому полягає метод параметричного інтегрування диференціальних рівнянь?

20. Показати, що задані функції є розв'язками відповідних рівнянь:

а) $y = Cx$ для рівняння $y - xy' = 0$;

б) $y = \dfrac{C}{\cos x}$ для рівняння $dy - y \operatorname{tg} x\, dx = 0$;

в) $y = \ln x + C$ для рівняння $dx - x dy = 0$;

г) $y = b \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{b} + C$ для рівняння $(x+y)^2 \dfrac{dy}{dx} = b^2$.

21. Розв'язати рівняння:

а) $x\left(1+y^2\right) + y\left(1+x^2\right)y' = 0$, відповідь: $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) = C$.

б) $2x^2 yy' + y^2 = 2$, відповідь: $y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}}$.

в) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + y^2 e^{\frac{-x}{y}}}{x^2}$, відповідь: $e^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = C$.

г) $xy' - y = x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$, відповідь: $Cx = \sin \dfrac{y}{x}$.

д) $2x^3 y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$, відповідь: $x = \pm y\sqrt{\ln Cx}$, $y = 0$.

є) $xy' - 2y = 2x^4$, відповідь: $y = Cx^2 + x^4$.

ж) $x^2 y' + xy + 1 = 0$, відповідь: $xy = C - \ln|x|$.

з) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$, відповідь: $y = x^4 \ln^2 Cx$, $y = 0$.

і) $y' + 2y = y^2 e^x$, відповідь: $y\left(e^x + Ce^{2x}\right) = 1$, $y = 0$.

к) $\left(2x + 3y^2 + 2yx\right)dx + \left(6xy + x^2 + 3\right)dy = 0$,

відповідь: $3xy^2 + x^2 y + 3y + x^2 = C$;

л) $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$, відповідь: $y = x^2 - \left[\frac{3}{2}\left(C - x^2\right)\right]^{\frac{2}{3}}$;

м) $y = y'^2$, відповідь: $y = \frac{(x+C)^2}{4}$ і $y = 0$;

н) $y = y' + \frac{e^x}{y'}$, відповідь: $y = Ce^x + \frac{1}{C}$ і $y = \pm 2e^{\frac{x}{2}}$.

22. Знайти частинні розв'язки рівнянь, що задовольняють початкові умови:
а) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(0) = -1$; відповідь: $y = 2 - 3\cos x$;
б) $(x + 2y)y' = 1$, $y(0) = -1$; відповідь: $x + 2y + 2 = 0$;
в) $y' = y \operatorname{tg} x + 2\sin x$, $y(0) = -1$; відповідь: $y = -\cos x$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Дубовик, В. П. Вища математика [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.

Дюженкова, Л.І. Вища математика. Приклади і задачі [Текст] / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін. – К.: Академія, 2002. – 624 с.

Семенюта, А.Я. Методические указания и контрольные задания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Высшая математика» (раздел «Дифференциальные уравнения») для студентов всех специальностей [Текст] / А. Я. Семенюта, А. С. Сорокин. – Д.: ДМетИ, 1990. – 52 с.

Соколенко, О. І. Вища математика [Текст] / О.І. Соколенко. – К.: Академія, 2002. – 432 с.

Сорокін, А. С. Диференціальні рівняння [Текст] / А.С. Сорокін, Л.Д. Тітова, О.Г. Холод. – Д.: ДМетАУ, 1999. – 180 с.

Сясєв, А. В. Диференціальні рівняння: навч. посіб. [Текст] / А.В. Сясєв. – Д.: Вид-во ДНУ, 2007. – 356 с.

Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] / А.Ф. Филиппов.– М.: Наука, 1979. – 128 с.

ЗМІСТ